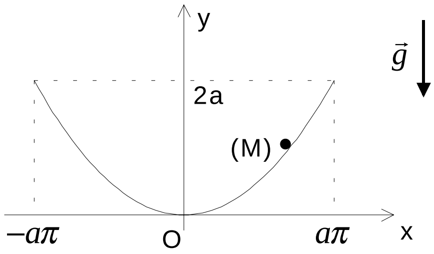
-EXERCICE 11.2-

• ENONCE :

« Mouvement d'un point matériel sur une cycloïde »



Un point matériel (M), de masse m, peut se déplacer sans frottements le long d'une cycloïde située dans le plan vertical xOy.
L'équation paramétrique de la cycloïde est:

$$\begin{cases} x(t) = a(\theta + \sin\theta) \\ y(t) = a(1 - \cos\theta) \end{cases} \quad \text{avec :} \quad -\pi \le \theta \le \pi$$

• On abandonne le point matériel (M), sans vitesse initiale, à partir d'un point d'ordonnée $y_0 \prec 2a$.

1) Justifier l'utilisation du Théorème de l'Energie Cinétique.
2) Exprimer E_C, E_P et y en fonction de l'abscisse curviligne s comptée à partir de l'origine O (on rappelle que l'on a : $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$)
3) En déduire une équation différentielle en $s(t)$, puis donner la loi d'évolution $s(t)$.

• CORRIGE :

«Mouvement d'un point matériel sur une cycloïde »

1) Le mouvement est plan $\Rightarrow$ à priori, il y a 2 degrés de liberté ; mais $x(t)$ et $y(t)$ sont liés à la variable unique $\theta(t)$: il n'y a donc en fait qu'un seul degré de liberté $\Rightarrow$ une seule équation scalaire suffit pour déterminer entièrement le mouvement $\Rightarrow$ on utilise le TEC.

2) $\boxed{E_C = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right] = \frac{1}{2}m\left(\frac{ds}{dt}\right)^2}$, puisque $\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2$

• $E_P = mgy$ (en prenant l'origine des énergies potentielles de pesanteur au point O)

$\Rightarrow$ il faut maintenant relier $y(t)$ à $s(t)$.

• $dx = a(1+\cos\theta)d\theta$ et $dy = a\sin\theta \times d\theta$ $\Rightarrow$

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = a^2[(1+\cos\theta)^2 + \sin^2\theta]\times(d\theta)^2 = 2a^2(1+\cos\theta)\times(d\theta)^2 = 4a^2\times\cos^2(\theta/2)\times(d\theta)^2$$

$\Rightarrow$ $ds = 2a\cos(\theta/2)d\theta$ (1)

(on retient cette solution, puisque pour $d\theta \geq 0$, on doit avoir $dx \geq 0$ et $ds \geq 0$, avec $\cos(\theta/2) \geq 0$ pour $-\pi \leq \theta \leq \pi$).

• En intégrant la relation (1), il vient : $s(\theta) = 4a\sin(\theta/2)$, avec $s(0) = 0$; par ailleurs, on peut récrire $y(\theta)$: $y(\theta) = a(1-\cos\theta) = 2a\sin^2(\theta/2)$ $\Rightarrow$ finalement : $\boxed{y(s) = \frac{s^2}{8a}}$ $\Rightarrow$ $\boxed{E_P(s) = \frac{mgs^2}{8a}}$

3) Comme il n'y a pas de frottements, il y a conservation de l'énergie mécanique du point matériel (M), ce qui se traduit par :

$$E_C(s) + E_P(s) = cste = \frac{1}{2}m\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \frac{mgs^2}{8a}$$ $\Rightarrow$ par dérivation, on obtient :

$$2\times\frac{1}{2}\times\frac{ds}{dt}\times\frac{d^2s}{dt^2} + 2\times\frac{g}{8a}\times s\times\frac{ds}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{d^2s(t)}{dt^2} + \frac{g}{4a}\times s(t) = 0} \qquad (2)$$

• L'équation différentielle (2) est celle d'un oscillateur harmonique dont la solution est :

$$s(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t \ , \qquad \text{avec :} \quad \boxed{\omega = \sqrt{\frac{g}{4a}}}$$

• $s(0) = \sqrt{8ay(0)} = \sqrt{8ay_0} = A$; $\frac{ds}{dt}(0) = 0 = \omega B$ $\Rightarrow$ $\boxed{B = 0}$ $\Rightarrow$ on a : $\boxed{s(t) = \sqrt{8ay_0}\times\cos\omega t}$

Rq : l'évolution de l'abscisse curviligne est donc purement sinusoïdale, même pour des angles non petits, contrairement au pendule simple.